

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ &
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ****ΘΕΜΑΤΑ****ΘΕΜΑ Α**

- A1.** Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[α,β]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[α,β]$, τότε να αποδείξετε ότι: $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$ **Μονάδες 7**
- A2.** Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού (Θ.Μ.Τ.). **Μονάδες 4**
- A3.** Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[α,β]$ του πεδίου ορισμού της; **Μονάδες 4**
- A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
- α)** Η εξίσωση $|z - z_0| = \rho, \rho > 0$ παριστάνει τον κύκλο με κέντρο το σημείο $K(z_0)$ και ακτίνα ρ^2 , όπου z, z_0 μιγαδικοί αριθμοί.
- β)** Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 .
- γ)** Ισχύει ότι: $|ημx| \leq |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- δ)** Ισχύει ότι: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 1}{x} = 1$.
- ε)** Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της. **Μονάδες 10**

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z και w για τους οποίους ισχύει:

$$(z - 2)(\bar{z} - 2) + |z - 2| = 2.$$

- B1.** Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z είναι κύκλος με κέντρο $K(2,0)$ και ακτίνα $\rho = 1$. (μονάδες 5)
Στη συνέχεια, για κάθε μιγαδικό z που ανήκει στον παραπάνω γεωμετρικό τόπο, να αποδείξετε ότι $|z| \leq 3$. (μονάδες 3) **Μονάδες 8**
- B2.** Αν οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2 που ανήκουν στον παραπάνω γεωμετρικό τόπο είναι ρίζες της εξίσωσης $w^2 + \beta w + \gamma = 0$, με w μιγαδικό αριθμό, $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$, και $|\operatorname{Im}(z_1) - \operatorname{Im}(z_2)| = 2$, τότε να αποδείξετε ότι $\beta = -4$ και $\gamma = 5$. **Μονάδες 9**
- B3.** Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ οι οποίοι ανήκουν στον γεωμετρικό τόπο του ερωτήματος **B1**. Αν ο μιγαδικός αριθμός v ικανοποιεί τη σχέση $v^3 + \alpha_2 v^2 + \alpha_1 v + \alpha_0 = 0$, τότε να αποδείξετε ότι $|v| < 4$. **Μονάδες 8**

ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με f παραγωγίσιμη, τέτοιες ώστε:

- $(f(x) + x)(f'(x) + 1) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f(0) = 1$ και

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΘΕΣΜΟΣ

ΑΘΗΝΑ – ΠΕΙΡΑΙΑΣ – ΜΑΡΟΥΣΙ

- $g(x) = x^3 + \frac{3x^2}{2} - 1$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$, $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 9

Γ2. Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης $f(g(x)) = 1$.

Μονάδες 8

Γ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ τέτοιο ώστε

$$\int_{x_0 - \frac{\pi}{4}}^0 f(t) dt = f\left(x_0 - \frac{\pi}{4}\right) \exp x_0.$$

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Α

Έστω $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύουν:

- Η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$

- $f(1) = 1$

- $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+5h) - f(1-h)}{h} = 0$

Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $g(x) = \int_{\alpha}^x \frac{f(t)-1}{t-1} dt$, $x \in (1, +\infty)$ και $\alpha > 1$. Να αποδείξετε ότι:

Δ1. $f'(1) = 0$ (μονάδες 4), καθώς επίσης ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 1$ (μονάδες 2).

Μονάδες 6

Δ2. Η g είναι γνησίως αύξουσα (μονάδες 3), και στη συνέχεια να λύσετε την ανίσωση στο

$$\mathbb{R}: \int_{8x^2+5}^{8x^2+6} g(u) du > \int_{2x^4+5}^{2x^4+6} g(u) du \quad (\text{μονάδες } 6).$$

Μονάδες 9

Δ3. Η g είναι κυρτή, καθώς επίσης ότι η εξίσωση $(\alpha-1) \int_{\alpha}^x \frac{f(t)-1}{t-1} dt = (f(\alpha)-1)(x-\alpha)$, $x > 1$, έχει ακριβώς μία λύση.

Μονάδες 10

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία, σχολικό βιβλίο σελ. 334-335.

Α2. Θεωρία, σχολικό βιβλίο σελ. 246.

Α3. Θεωρία, σχολικό βιβλίο σελ. 222.

Α4. $\alpha \rightarrow \Lambda$, $\beta \rightarrow \Sigma$, $\gamma \rightarrow \Sigma$, $\delta \rightarrow \Lambda$, $\varepsilon \rightarrow \Sigma$

ΘΕΜΑ Β

Β1. Είναι $(z-2)(\bar{z}-2) + |z-2| = 2 \Leftrightarrow |z-2|^2 + |z-2| - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |z-2| = 1 \text{ ή} \\ |z-2| = -2 \text{ αδύνατο} \end{cases}$

άρα $|z-2| = 1 \Leftrightarrow |z - (2+0i)| = 1$. Επομένως ο Γ.Τ. των εικόνων του z είναι κύκλος με κέντρο $K(2,0)$ και ακτίνα $\rho = 1$. Είναι

1^{ος} τρόπος

$$||z| - |-2|| \leq |z-2| = 1 \Leftrightarrow -1 \leq |z| - 2 \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq |z| \leq 3.$$

ΑΘΗΝΑ Βερανζέρου 4, Πλ. Κάνιγγος, 2103841034

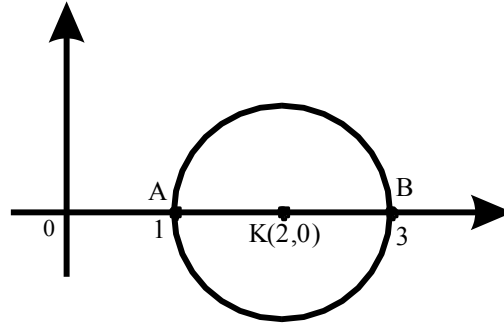
ΠΕΙΡΑΙΑΣ Αγ. Κωνσταντίνου 11, έναντι Δημαρχείου 2104135221

ΜΑΡΟΥΣΙ Δ. Ράλλη 3 & Κων/νου Παλαιολόγου, Πλ. Κασταλίας, 2106143508

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΘΕΣΜΟΣ

ΑΘΗΝΑ – ΠΕΙΡΑΙΑΣ – ΜΑΡΟΥΣΙ

2^{ος} τρόπος



άρα $\max|z| = (OB) = 3$.

B2. Έστω: z_1, z_2 ρίζες της εξίσωσης $w^2 + \beta w + \gamma = 0$ με $z_1 = x_1 + y_1 i$, $z_2 = x_2 + y_2 i$, $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$.

$$\text{Τότε } \bar{z}_2 = z_1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = x_1 \\ y_2 = -y_1 \end{cases}$$

$$|\operatorname{Im} z_1 - \operatorname{Im} z_2| = 2 \Leftrightarrow |y_1 - (-y_1)| = 2 \Leftrightarrow |y_1| = 1 \quad (1)$$

και ο z_1 ανήκει στον κύκλο με κέντρο $K(2,0)$ και ακτίνα $\rho = 1$,

$$\text{άρα } (x_1 - 2)^2 + y_1^2 = 1 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} x_1 = 2 \text{ και } y_1 = \pm 1.$$

Άρα $z_1 = 2 + i$, $z_2 = \bar{z}_1 = 2 - i$.

$$\text{Οπότε } z_1 + z_2 = -\frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow z_1 + \bar{z}_1 = -\frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow 4 = -\beta \text{ άρα } \beta = -4$$

$$\text{και } z_1 \cdot z_2 = \frac{\gamma}{\alpha} \Leftrightarrow z_1 \bar{z}_1 = \frac{\gamma}{\alpha} \Leftrightarrow |z_1|^2 = \gamma \Leftrightarrow \gamma = 5.$$

B3. 1^{ος} τρόπος

Έστω $|v| \geq 4$. Τότε $v^3 = -\alpha_2 v^2 - \alpha_1 v - \alpha_0$,

$$\text{άρα } |v^3| = |-\alpha_2 v^2 - \alpha_1 v - \alpha_0| = |\alpha_2 v^2 + \alpha_1 v + \alpha_0|.$$

Από τριγωνική ανισότητα

$$|v|^3 = |\alpha_2 v^2 + \alpha_1 v + \alpha_0| \leq |\alpha_2| |v|^2 + |\alpha_1| |v| + |\alpha_0| \leq 3(|v|^2 + |v| + 1),$$

$$\text{άρα } |v|^3 \leq 3 \frac{|v|^3 - 1}{|v| - 1}, \quad |v| \neq 1 \text{ γιατί } |v| \geq 4.$$

$$|v|^3 (|v| - 1) \leq 3(|v|^3 - 1) \Leftrightarrow |v|^4 \leq 4|v|^3 - 3,$$

$$\text{όμως } 4|v|^3 - 3 < 4|v|^3, \text{ άρα } |v|^4 < 4|v|^3 \Leftrightarrow |v| < 4 \text{ άτοπο, άρα } |v| < 4.$$

2^{ος} τρόπος

$$|v|^3 = |\alpha_2 v^2 + \alpha_1 v + \alpha_0| \leq |\alpha_2| |v|^2 + |\alpha_1| |v| + |\alpha_0| \leq 3|v|^2 + 3|v| + 3,$$

$$\text{άρα } |v|^3 - 3[|v|^2 + |v| + 1] \leq 0 \Leftrightarrow |v|^3 - 3[|v|^2 + |v| + 1] + 1 - 1 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$[|v| - 1][|v|^2 + |v| + 1] - 3[|v|^2 + |v| + 1] \leq -1 \Leftrightarrow [|v|^2 + |v| + 1][|v| - 4] \leq -1 \Leftrightarrow$$

$$|v|^2 + |v| + 1 > 0$$

$$\text{άρα } |v| - 4 < 0 \Leftrightarrow |v| < 4.$$

ΑΘΗΝΑ Βερανζέρου 4, Πλ. Κάνιγγος, 2103841034

ΠΕΙΡΑΙΑΣ Αγ. Κωνσταντίνου 11, έναντι Δημαρχείου 2104135221

ΜΑΡΟΥΣΙ Δ. Ράλλη 3 & Κων/νου Παλαιολόγου, Πλ. Κασταλίας, 2106143508

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΘΕΣΜΟΣ

ΑΘΗΝΑ – ΠΕΙΡΑΙΑΣ – ΜΑΡΟΥΣΙ

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Είναι $(f(x) + x)(f'(x) + 1) = x, x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow (f(x) + x)(f(x) + x)' = x \Leftrightarrow 2(f(x) + x)(f(x) + x)' = 2x$$

$$\Leftrightarrow \left[(f(x) + x)^2 \right]' = (x^2)', x \in \mathbb{R}$$

Άρα, από συνέπεια του Θ.Μ.Τ. είναι $(f(x) + x)^2 = x^2 + c, x \in \mathbb{R}$ (1)

και c σταθερός πραγματικός αριθμός.

Για $x=0$ η (1) δίνει $(f(0))^2 = c \Leftrightarrow c=1$, άρα $(f(x) + x)^2 = x^2 + 1, x \in \mathbb{R}$.

Έστω $\kappa(x) = f(x) + x, x \in \mathbb{R}$. Τότε η κ ως άθροισμα συνεχών

(η f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα συνεχής, η x πολυωνυμική)

είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και ισχύει

$$\kappa^2(x) = x^2 + 1, x \in \mathbb{R} \quad (2)$$

Υποθέτουμε ότι υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ ώστε $\kappa(x_0) = 0$.

Τότε η (2) για $x_0 = 0$ δίνει $x_0^2 + 1 = 0$, αδύνατη στο $\mathbb{R}$.

Επομένως η κ ως συνεχής και μη μηδενιζόμενη στο $\mathbb{R}$ διατηρεί σταθερό πρόσημο.

• Αν $\kappa(x) > 0$, τότε $\kappa(x) = \sqrt{x^2 + 1} \Rightarrow f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x, x \in \mathbb{R}$.

• Αν $\kappa(x) < 0$, τότε $\kappa(x) = -\sqrt{x^2 + 1} \Rightarrow f(x) = -\sqrt{x^2 + 1} - x, x \in \mathbb{R}$.

Όμως $f(0) = 1$, άρα $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x, x \in \mathbb{R}$.

Γ2. Είναι $f(g(x)) = 1 \Leftrightarrow f(g(x)) = f(0), x \in \mathbb{R}$ (3)

$$\text{Όμως } f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} - 1 = \frac{x - \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}} < 0$$

$$\text{γιατί } \sqrt{x^2 + 1} > x \Leftrightarrow \begin{cases} \text{για } x \geq 0 \text{ είναι } x^2 + 1 > x^2 \\ \text{για } x < 0 \text{ ισχύει} \end{cases}$$

επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$,

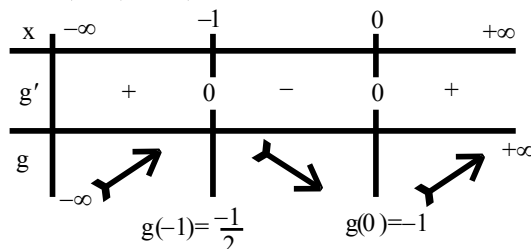
$$\text{επομένως η (3) δίνει } g(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 + \frac{3x^2}{2} - 1 = 0.$$

Η g ως πολυωνυμική είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$g'(x) = 3x^2 + 3x = 3x(x+1), x \in \mathbb{R},$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ή} \\ x = -1 \end{cases}$$

$$g'(x) > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$$



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$$

ΑΘΗΝΑ Βερανζέρου 4, Πλ. Κάνιγγος, 2103841034

ΠΕΙΡΑΙΑΣ Αγ. Κωνσταντίνου 11, έναντι Δημαρχείου 2104135221

ΜΑΡΟΥΣΙ Δ. Ράλλη 3 & Κων/νου Παλαιολόγου, Πλ. Κασταλίας, 2106143508

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΘΕΣΜΟΣ

ΑΘΗΝΑ – ΠΕΙΡΑΙΑΣ – ΜΑΡΟΥΣΙ

Όταν $x \in (-\infty, -1]$ η g είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, άρα το σύνολο τιμών της

$$\text{είναι το } \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x), g(-1) \right] = \left(-\infty, -\frac{1}{2} \right].$$

Το 0 δεν ανήκει στο σύνολο τιμών της, άρα η $g(x) = 0$ αδύνατη για $x \in (-\infty, -1]$.

Όταν $x \in [-1, 0]$ η g είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, άρα το σύνολο τιμών της είναι

$$\text{το } [g(0), g(-1)] = \left[-1, -\frac{1}{2} \right].$$

Το 0 δεν ανήκει στο σύνολο τιμών της, άρα η $g(x) = 0$ αδύνατη για $x \in [-1, 0]$.

Όταν $x \in [0, +\infty)$ η g είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, άρα το σύνολο τιμών της είναι

$$\text{το } \left[g(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \right) = [-1, +\infty).$$

Το 0 ανήκει στο σύνολο τιμών της και επειδή είναι γνησίως μονότονη υπάρχει μοναδικό $\rho \in (0, +\infty)$ ώστε $g(\rho) = 0$.

Γ3. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\Lambda(x) = f\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \varepsilon \varphi x + \int_0^{x - \frac{\pi}{4}} f(t) dt$.

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα ορίζεται η $K(x) = \int_0^x f(t) dt$ στο $\mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη με $K'(x) = f(x)$.

Η $F(x) = \int_0^{x - \frac{\pi}{4}} f(t) dt = K\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Επομένως η $\Lambda(x)$, ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων, είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, επομένως και στο $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

$$\Lambda(0) = f\left(-\frac{\pi}{4}\right) \varepsilon \varphi 0 + \int_0^{-\frac{\pi}{4}} f(t) dt = -\int_{-\frac{\pi}{4}}^0 f(t) dt < 0$$

γιατί $f(x) > 0$ στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $\left[-\frac{\pi}{4}, 0\right]$.

$$-\frac{\pi}{4} < 0 \text{ άρα } \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 f(t) dt > 0$$

$$\text{και } \Lambda\left(\frac{\pi}{4}\right) = f(0) \varepsilon \varphi \frac{\pi}{4} + \int_0^0 f(t) dt = f(0) \stackrel{\text{Υπόθ.}}{=} 1 > 0, \text{ δηλαδή } \Lambda(0) \Lambda\left(\frac{\pi}{4}\right) < 0.$$

Η Λ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$,

επομένως υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ ώστε

$$\Lambda(x_0) = 0 \Leftrightarrow f\left(x_0 - \frac{\pi}{4}\right) \varepsilon \varphi x_0 + \int_0^{x_0 - \frac{\pi}{4}} f(t) dt = 0 \Leftrightarrow f\left(x_0 - \frac{\pi}{4}\right) \varepsilon \varphi x_0 = \int_{x_0 - \frac{\pi}{4}}^0 f(t) dt$$

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΘΕΣΜΟΣ

ΑΘΗΝΑ – ΠΕΙΡΑΙΑΣ – ΜΑΡΟΥΣΙ

ΘΕΜΑ Α

Δ1. Είναι $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+5h) - f(1-h)}{h} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{f(1+5h) - f(1)}{h} - \frac{f(1-h) - f(1)}{h} \right] = 0.$

Όμως $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+5h) - f(1)}{h} \xrightarrow[\text{το } u \rightarrow 1]{\substack{1+5h=u \\ \text{όταν } h \rightarrow 0 \\ \text{το } u \rightarrow 1}} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(u) - f(1)}{\frac{u-1}{5}} = 5 \lim_{u \rightarrow 1} \frac{f(u) - f(1)}{u-1} = 5f'(1)$

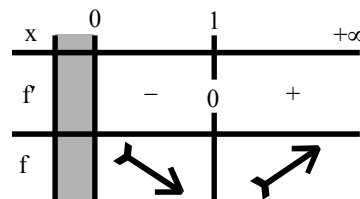
και $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-h) - f(1)}{h} \xrightarrow[\text{το } t \rightarrow 1]{\substack{1-h=t \\ \text{όταν } h \rightarrow 0 \\ \text{το } t \rightarrow 1}} \lim_{t \rightarrow 1} \frac{f(t) - f(1)}{-(t-1)} = -f'(1)$

άρα $5f'(1) + f'(1) = 0$ δηλαδή $f'(1) = 0.$

Για $x > 1 \xrightarrow{f' \uparrow} f'(x) > f'(1) = 0.$

Για $0 < x < 1 \xrightarrow{f' \uparrow} f'(x) < f'(1) = 0.$

Η f στο $x_0 = 1$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $f(1) = 1$, δηλαδή $f(x) \geq f(1) = 1$ για κάθε $x \in (0, +\infty).$ [Η από κυρτότητα και εφαπτομένη στο $x_0 = 1$].



Δ2. Η συνάρτηση $\kappa(t) = \frac{f(t)-1}{t-1}$ ως πηλίκο συνεχών είναι συνεχής στο $(1, +\infty)$ και $\alpha > 1$,

επομένως ορίζεται η $g(x) = \int_{\alpha}^x \kappa(t) dt$ στο $(1, +\infty)$, $\alpha > 1$,

και είναι παραγωγίσιμη με $g'(x) = \kappa(x) = \frac{f(x)-1}{x-1} > 0$, $x \in (1, +\infty)$,

γιατί από το Δ1 για $x > 1 \Rightarrow f(x) > f(1) = 1 \Rightarrow f(x) - 1 > 0.$

Επομένως η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(1, +\infty).$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $F(x) = \int_x^{x+1} g(u) du$ στο $(1, +\infty).$

Η g ως παραγωγίσιμη είναι συνεχής στο $(1, +\infty)$, άρα ορίζεται η $\omega(x) = \int_{\kappa}^x g(u) du$ στο $(1, +\infty)$ με $\kappa > 1$ και είναι παραγωγίσιμη με $\omega'(x) = g(x).$

Τότε $F(x) = \omega(x+1) - \omega(x)$, $x \in (1, +\infty)$,

αφού $A_{\omega(x+1)} = \{x \in \mathbb{R} : x+1 > 1\} = (0, +\infty)$,

άρα $A_F = A_{\omega(x+1)} \cap A_{\omega(x)} = (1, +\infty)$

και είναι παραγωγίσιμη με $F'(x) = \omega'(x+1) - \omega'(x) = g(x+1) - g(x) > 0$, $x \in (1, +\infty)$,

αφού $x+1 > x \xrightarrow[\text{στο } (1, +\infty)]{g \uparrow} g(x+1) > g(x).$

Επομένως η F είναι γνησίως αύξουσα στο $(1, +\infty).$

Είναι $\int_{8x^2+5}^{8x^2+6} g(u) du > \int_{2x^4+5}^{2x^4+6} g(u) du \Leftrightarrow F(8x^2+5) > F(2x^4+5) \xrightarrow{F \uparrow} \Leftrightarrow$

$8x^2+5 > 2x^4+5 \Leftrightarrow 2x^4-8x^2 < 0 \Leftrightarrow 2x^2(x^2-4) < 0 \Leftrightarrow x^2-4 < 0 \Leftrightarrow$

$x \in (-2, 0) \cup (0, 2)$

γιατί $8x^2+5 > 1$ και $2x^4+5 > 1$

ΑΘΗΝΑ Βερανζέρου 4, Πλ. Κάνιγγος, 2103841034

ΠΕΙΡΑΙΑΣ Αγ. Κωνσταντίνου 11, έναντι Δημαρχείου 2104135221

ΜΑΡΟΥΣΙ Δ. Ράλλη 3 & Κων/νου Παλαιολόγου, Πλ. Κασταλίας, 2106143508

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΘΕΣΜΟΣ

ΑΘΗΝΑ – ΠΕΙΡΑΙΑΣ – ΜΑΡΟΥΣΙ

Δ3. Είναι $g'(x) = \frac{f(x)-1}{x-1}$, $x \in (1, +\infty)$.

Ως ηλίκο παραγωγίσιμων είναι παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$ με

$$g''(x) = \frac{f'(x)(x-1) - f(x) + 1}{(x-1)^2}, \quad x \in (1, +\infty)$$
$$= \frac{f'(x) - \frac{f(x)-1}{x-1}}{(x-1)^3} > 0 \text{ στο } (1, +\infty).$$

Γιατί: Για τη συνάρτηση f στο $[1, x]$ με $x > 1$ εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής, αφού η f , ως παραγωγίσιμη, είναι συνεχής στο $[1, x]$ και παραγωγίσιμη στο $(1, x)$.

Επομένως υπάρχει $\xi \in (1, x)$: $f'(\xi) = \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{f(x)-1}{x-1}$.

Είναι $1 < \xi < x \Rightarrow f'(\xi) < f'(x) \Rightarrow f'(x) - \frac{f(x)-1}{x-1} > 0$.

Επομένως η g είναι κυρτή στο $(1, +\infty)$.

Η εξίσωση $(\alpha-1) \int_{\alpha}^x \frac{f(t)-1}{t-1} dt = (f(\alpha)-1)(x-\alpha)$, $x > 1$

ισοδύναμα γράφεται $(\alpha-1)g(x) = (f(\alpha)-1)(x-\alpha)$, $x > 1$

$$\Leftrightarrow g(x) = \frac{f(\alpha)-1}{\alpha-1}(x-\alpha) \quad (1)$$

1^{ος} τρόπος

Το $x_0 = \alpha$ προφανής ρίζα.

Για $x \neq \alpha$ η (1) γράφεται $\frac{g(x)}{x-\alpha} = \frac{f(\alpha)-1}{\alpha-1} \Leftrightarrow \frac{g(x)-g(\alpha)}{x-\alpha} = g'(\alpha)$ (2)

Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την g στο $[\alpha, x]$ με $1 < \alpha < x$.

Η g ως παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$ είναι συνεχής στο $[\alpha, x]$ και παραγωγίσιμη στο (α, x) .

Επομένως υπάρχει $\rho_1 \in (\alpha, x)$: $g'(\rho_1) = \frac{g(x)-g(\alpha)}{x-\alpha}$.

Όμως $\alpha < \rho_1 < x \xRightarrow[\text{ἀρα } g' \uparrow]{g \text{ κυρτή}} g'(\rho_1) > g'(\alpha) \Rightarrow \frac{g(x)-g(\alpha)}{x-\alpha} > g'(\alpha)$.

Επομένως η (2) είναι αδύνατη.

Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την g στο $[x, \alpha]$ με $1 < x < \alpha$.

Η g ως παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$ είναι συνεχής στο $[x, \alpha]$ και παραγωγίσιμη στο (x, α) ,

επομένως υπάρχει $\rho_2 \in (x, \alpha)$: $g'(\rho_2) = \frac{g(x)-g(\alpha)}{x-\alpha}$.

Όμως $x < \rho_2 < \alpha \xRightarrow[\text{ἀρα } g' \uparrow]{g \text{ κυρτή}} g'(\rho_2) < g'(\alpha) \Rightarrow \frac{g(x)-g(\alpha)}{x-\alpha} < g'(\alpha)$.

Επομένως η (2) είναι αδύνατη.

Άρα η δοσμένη εξίσωση έχει μοναδική ρίζα το $x = \alpha$.

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΘΕΣΜΟΣ

ΑΘΗΝΑ – ΠΕΙΡΑΙΑΣ – ΜΑΡΟΥΣΙ

2^{ος} τρόπος

Η (1) γράφεται $g(x) = g'(\alpha)(x - \alpha)$ και η εξίσωση της εφαπτομένης στην C_g στο α είναι $y = g'(\alpha)(x - \alpha)$.

Η g είναι κυρτή στο $(1, +\infty)$, άρα $g(x) \geq y \Rightarrow g(x) \geq g'(\alpha)(x - \alpha)$.

Η ισότητα ισχύει μόνο για $x = \alpha$.

3^{ος} τρόπος

Μονοτονία για την $\Pi(x) = (\alpha - 1) \int_{\alpha}^x \frac{f(t) - 1}{t - 1} dt - (f(\alpha) - 1)(x - \alpha)$, $x \in (1, +\infty)$.

Επιμέλεια:

**Σ. ΚΟΥΤΣΟΥΒΕΛΗΣ – Π. ΛΥΓΚΩΝΗΣ – Μ. ΣΙΜΙΤΖΟΓΛΟΥ
Τ. ΝΤΡΙΤΣΟΣ – Μ. ΤΣΙΜΕΛΑΣ – Δ. ΣΤΡΟΥΖΑΚΗΣ**